Korollar 5.4: $\dim_K V = n$

$$\iff \quad V \cong K^n$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \underline{b}_i \leftarrow\!\shortmid \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

für eine Basis $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$

Beispiel:

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\}.$$

$$= \ker \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow[f]{(1\ 1\ 1)} & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & x+y+z = (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

ist UVR.

$$\dim U = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\underbrace{\operatorname{im}(f)}_{\mathbb{R}}))$$
$$= 3 \qquad\qquad - \quad 1$$
$$= 2.$$

Also (5.4): $\quad U \cong \mathbb{R}^2$

konkreter Isomorphismus hängt ab von Basiswahl

Basis von $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

linear unabhängig und in $\mathcal{U}$ ✓

Erzeugendensystem von $\mathcal{U}$, da $\dim \mathcal{U} = 2$.

$$\mathcal{U} \xleftarrow{\cong} \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y-x \\ -y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \longleftarrow\!\shortmid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{U} \xleftarrow{\cong} \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} 2x \\ -x-y \\ y-x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \longleftarrow\!\shortmid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$